

Цілком впорядковані множини

Нехай на множині M задано *лінійний строгий порядок* \prec , тобто виконано наступні дві властивості:

1. $x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z$
2. Для довільних x та y виконується одне і тільки одне з наступних відношень $x \prec y$, $y \prec x$, $x = y$.

Лінійний строгий порядок називається *повним*, якщо довільна непорожня множина $A \subseteq M$ має найменший (згідно порядку \prec) елемент, який ми позначатимемо 0 .

Доведіть, що лінійний строгий порядок \prec є повним тоді й тільки тоді, коли не існує нескінченної спадної послідовності $x_1 \succ x_2 \succ \dots$.

Принцип індукції: для повного порядку \prec

$$\forall x(\forall y((y \prec x) \Rightarrow A(y)) \Rightarrow A(x)) \Rightarrow \forall x A(x).$$

Нехай на A задан повний порядок \prec_A , а на B повний порядок \prec_B . Тоді порядок

$$(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \prec_A a_2 \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 \prec_B b_2)$$

є повним на $A \times B$.

У деякому літньому таборі протікають стелі внаслідок наявності дірок у даху. Ремонтник Василь кожен день залатує одну дірку, але поки він це робить, може з'явитися декілька інших — втім, меншої площі.

Чи вірно, що рано чи пізно усі дірки будуть залатані, якщо площі дірок є а) дійсними; б) цілими числами?

Нехай на множині M задано повний порядок \prec .

У M є найменший елемент.

Для кожного елемента $x \in M$ окрім найбільшого існує єдиний наступний елемент, тобто таке $y \in M$, що $x \prec y$, але не існує такого $z \in M$, що $x \prec z \prec y$. Таке y позначається як $x + 1$. За індукцією визначаємо для довільного $k \in \mathbb{N}_0$ $x + (k + 1) = (x + 1) + k$.

Елемент M називається *граничним*, якщо він не є наступним для жодного елемента з M .

Довільне $x \in M$ можна єдиним чином представити у вигляді $z + k$, $k \in \mathbb{N}_0$, де z — граничний елемент.

Довільна обмежена підмножина $A \subseteq M$ має точну верхню грань.

Нехай $f: M \rightarrow M$ — зростаюча функція (тобто $x \succ y \Rightarrow f(x) \succeq f(y)$). Тоді $f(x) \succeq x$ для всіх x .

Якщо $M = A \cup B$, де $A \cap B = \emptyset$, і кожен елемент A менше за кожен елемент B , то A називається *початковим відрізком* M .

Початковий відрізок є цілком впорядкованим.

Початковий відрізок C початкового відрізка A множини M є початковим відрізком множини M .

Об'єднання довільного сімейства початкових відрізків однієї й тієї ж множини є також початковим відрізком.

Для довільних двох початкових відрізків множини M один є початковим відрізком іншого.

Початкові відрізки M , упорядковані за включенням, утворюють цілком впорядковану множину.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Якщо $x \in M$, то множини $[0, x) = \{y | y \prec x\}$ та $[0, x]$ є початковими відрізками.
2. Довільний початковий відрізок M , відмінний від M , має вигляд $[0, x)$ для деякого $x \in M$.