Поворот

Вот, новый поворот.
Что он нам несет?
...
И не разберешь,
Пока не повернешь.

Означення. *Поворот с центром O (або відносно точки O) на кут φ — це перетворення площини, яке переводить точку X у таку точку X', що $OX' = OX$ та $\angle(\overline{OX}, \overline{OX'}) = \varphi$.*

Задачі

1. Довести, що поворот є рухом.

2. Знайти образ а) прямої; б) кола при повороті.

3. При повороті на кут φ пряма переходить у пряму, яка перетинає прообраз під кутом φ.

4. Доведіть, що середини сторін правильного многокутника утворюють правильний многокутник.

5. Нехай O — центр правильного многокутника $A_1A_2 \ldots A_n$.
Доведіть, що $\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \ldots + \overline{OA_n} = 0$.

6. Нехай дві прямі перетинаються під кутом α. Доведіть, що при повороті на кут α відносно будь-якої точки одна з цих прямих перейде у пряму, паралельну іншій.

7. Поворот з центром O переводить пряму l_1 у пряму l_2, а точку $A_1 \in l_1$ — у точку $A_2 \in l_2$. Доведіть, що точка перетину l_1 і l_2 лежить на описаному колі трикутника A_1OA_2.

8. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте рівносторонній трикутник, у якого одна з вершин знаходиться в даній точці, а дві інші — на сторонах даного кута.

9. Нехай M і N — середини сторін CD і DE правильного шестикутника $ABCDEF$. Знайдіть кут між прямими AM і BN.

10. Через центр квадрата проведено дві перпендикулярні прямі. Довести, що їхні точки перетину зі сторонами квадрата утворюють квадрат.

11. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте рівносторонній трикутник ABC так, щоб його вершини лежали на трьох даних паралельних прямих.

12. Всередині квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взято точку P. З вершини A_1 опущено перпендикуляр на A_2P. З вершини A_2 — перпендикуляр на A_3P, з вершини A_3 — перпендикуляр на A_4P, з вершини A_4 — перпендикуляр на A_1P. Доведіть, що всі чотири перпендикуляри конкурентні.

13. На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ взято точки M і K відповідно так, що $\angle BAM = \angle MAK$. Доведіть, що $BM + KD = AK$.

14. (*теорема Помпейю*) Точка M лежить на меншій дузі AB описаного кола правильного трикутника ABC. Довести, що $MC = MA + MB$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Якщо повернути многокутник навколо деякої точки на 70°, то він перейде в себе. Яка найменша кількість вершин може бути в цього многокутника?

2. У трикутнику ABC проведено медіану CM і висоту CH. Через довільну точку P проведено прямі, перпендикулярно CA, CM і CB, які перетинають CH в точках A_1, M_1 і B_1. Довести, що $A_1M_1 = B_1M_1$.

3. На сторонах AB і BC трикутника ABC побудовано зовнішнім чином квадрати $ABMN$ і $BCPQ$. Доведіть, що центри цих квадратів і середини відрізків MQ і AC утворюють квадрат.

4. За допомогою циркуля і лінійки впишіть квадрат в даний паралелограм.

5. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте правильний трикутник, у якого одна з вершин була б в даній точці, а дві інші — на двох даних колах.

6. На дузі AC описаного кола правильного трикутника ABC взято точку $M \neq C$, P — середина цієї дуги, N — середина хорди BM, K — основа перпендикуляра, опущеного з точки P на MC. Довести, що трикутник ANK правильний.