

# Рекуррентные соотношения

## Конечные разности

Конечной разностью последовательности  $a_n$  называется последовательность

$$b_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

**Задача 1.** Найдите  $\Delta a_n$ , где

1.  $a_n = n$
2.  $a_n = n^2$
3.  $a_n = 2(n^2 + n)$

**Задача 2.** Докажите, что оператор  $\Delta$  линейный, т.е.

1.  $\Delta(a_n + b_n) = \Delta a_n + \Delta b_n$
2.  $\Delta(k \cdot a_n) = k \cdot \Delta a_n$

**Задача 3.** Пусть  $a_n = P_k(n)$  — многочлен  $k$ -й степени от  $n$ . Докажите, что  $\Delta a_n$  является многочленом  $(k - 1)$ -й степени от  $n$ .

**Задача 4.** Найдите все такие последовательности  $a_n$ , что

1.  $\Delta a_n = 0$
2.  $\Delta a_n = c$

**Задача 5.** Пусть  $\Delta a_n = P_k(n)$  — многочлен  $k$ -й степени от  $n$ . Докажите, что  $a_n = Q_{k+1}(n)$  — некоторый многочлен  $(k + 1)$ -й степени от  $n$ .

**Задача 6.** Пусть  $k$  — фиксированное натуральное число. Докажите, что  $1^k + 2^k + \dots + n^k$  — многочлен  $(k + 1)$ -й степени от  $n$ .

## Рекуррентные соотношения

Линейным однородным рекуррентным соотношением (ЛОРС)  $n$ -го порядка называется соотношение

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k},$$

где  $c_1, \dots, c_k$  — некоторые числа.

**Задача 7.** Рассмотрим последовательность  $a_n = n$ . Запишите для  $a_n$  ЛОРС, которое ее определяет. Каков его порядок?

**Задача 8.** Пусть последовательность  $a_n$  задана некоторым ЛОРС  $n$ -го порядка. Докажите, что  $\Delta a_n$  также задается ЛОРС  $n$ -го порядка. Чему равны коэффициенты этого соотношения?

**Задача 9.** Докажите, что ЛОРС  $k$ -го порядка однозначно определяет последовательность, если заданы ее первые  $k$  членов.

**Задача 10.** Пусть  $\Delta a_n = b_n$  и  $b_n$  удовлетворяет ЛОРС  $k$ -го порядка. Докажите, что  $a_n$  удовлетворяет ЛОРС  $(k + 1)$ -го порядка.

**Задача 11.** Докажите, что  $n^k$  удовлетворяет ЛОРС  $(k + 1)$ -го порядка.

**Задача 12.** Докажите, что если  $a_n, b_n$  — решения ЛОРС, то следующие последовательности также являются решениями того же ЛОРС:

1.  $a_n + b_n$
2.  $k \cdot a_n$

## Рекуррентные соотношения 1-го порядка

**Задача 13.** Решите ЛОРС 1-го порядка

$$a_n = qa_{n-1}, \quad a_0 = b.$$

Рассмотрим линейное *неоднородное* рекуррентное соотношение 1-го порядка

$$a_n = qa_{n-1} + d, \quad a_0 = b.$$

Его решение называется *арифметико-геометрической прогрессией*.

**Задача 14.** Докажите, что при  $q \neq 1$  все члены арифметико-геометрической прогрессии можно уменьшить или увеличить на одно и то же число, так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

**Задача 15.** Решите линейное неоднородное рекуррентное соотношение 1-го порядка.

## Рекуррентные соотношения 2-го порядка

Рассмотрим ЛОРС 2-го порядка

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}.$$

**Задача 16.** При каких  $p$  и  $q$  существует геометрическая прогрессия  $a_n = g^n$ , которая удовлетворяет данному ЛОРС? При этих  $p$  и  $q$  найдите общий вид решения ЛОРС 2-го порядка.

**Задача 17.** Вывести формулу для чисел Фибоначчи, определяемых ЛОРС 2-го порядка

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad f_0 = 0, f_1 = 1.$$