

Метод впорядкованих наборів

Математику уже за то любить следует,
что она ум в порядок приводит.

М. В. Ломоносов

1. Відомо, що $x_1 \geq x_2$, $y_1 \geq y_2$. Доведіть, що $x_1y_1 + x_2y_2 \geq x_1y_2 + x_2y_1$.
2. Нехай $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, і c_1, c_2, \dots, c_n — деяка перестановка чисел b_1, b_2, \dots, b_n . Доведіть, що

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1.$$

3. Нехай b_1, b_2, \dots, b_n — деяка перестановка додатніх чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Доведіть, що

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

Коли досягається рівність?

4. Доведіть, що для натуральних чисел a, b, c виконується нерівність

$$a \cdot 2^a + b \cdot 2^b + c \cdot 2^c \geq a \cdot 2^b + b \cdot 2^c + c \cdot 2^a.$$

5. Для дійсних чисел a, b, c довести нерівність

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a.$$

6. Для додатніх чисел x_1, x_2, \dots, x_n довести нерівність

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_1} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

7. Нехай a, b, c — довжини сторін трикутника, α, β і γ — величини протилежних кутів. Довести, що

$$\alpha a + \beta b + \gamma c \geq \frac{\alpha b + \alpha c + \beta a + \beta c + \gamma a + \gamma b}{2}.$$

8. Для додатніх чисел a, b, c довести нерівність

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

9. (нерівність Чебишова) Нехай $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$. Довести, що

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}{n}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

Для будь-яких додатніх a, b, c довести нерівності:

1. $a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$.
2. $a + b + c \geq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}$.
3. $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(a + c - b)$.