Крихти теорії чисел

1. Знайдіть всі прості p такі, що $2^p + 1 \vdots p$.

2. Якщо p і q — різні прості числа. Довести, що $a^{pq} - a^p - a^q + a \vdots pq$.

3. (*теорема Вільсона*) Довести, що конгруентність $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ виконується тоді і тільки тоді, коли n просте.

4. Якщо p — непарне просте число, то для довільного цілого n $n^p \equiv n \pmod{2p}$.

5. Якщо p — непарне просте та $m^p + n^p$ ділиться на p, то воно також ділиться на p^2.

6. Для непарного простого p число $(p-1)^p + 1$ ділиться на p^2, але не ділиться на p^3.

7. Довести, що усі непарні дільники числа $x^2 + 1$ мають вигляд $4k + 1$.

Означення. Показником цілого числа a за модулем m (де a і m взаємно прості) називається найменше натуральне d, таке що $a^d \equiv 1 \pmod{m}$.

8. Якщо d — показник a за модулем m та $a^t \equiv 1 \pmod{m}$, то $d|t$.

9. Довести, що показник будь-якого числа за модулем m ділить $\varphi(m)$.

10. Знайдіть усі натуральні n, такі що $2^n - 1 \vdots n$.

11. Знайдіть усі непарні n, такі що $3^n + 1 \vdots n$.

12. Знайдіть усі натуральні n, такі що $2^n - 3^n \vdots n$.

13. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел n і p, що p просте, $n < 3p$ та $(p-1)^n + 1 \vdots n^{p-1}$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що показник 2 за модулем 101 дорівнює 100.

2. Довести, що якщо $3^n + 4^n \vdots n$ та $n \geqslant 2$, то $n \vdots 7$.

3. Довести, що для будь-яких натуральних a і n число $a^{n!} - 1$ ділиться на n.

4. Довести, що для будь-яких натуральних a і n число $\varphi(a^n - 1)$ ділиться на n.