λ-числення

або як Роман Ігорович (РІ) виграв заклад у Юрія Валерійовича (ЮВ)

За умовами закладу, ЮВ повинен кожен день виконувати один ритуал, що полягає у наступному.

Спочатку РІ виписує на дошці декілька ланцюжків символів, які він називає λ-*термами*, або просто *термами*. Вони виписуються за трьома простими правилами:

1. можна написати будь-яку змінну, (наприклад, x);
2. можна взяти два терми M та N, що записані на дошці, і замість них записати терм (MN);
3. можна взяти терм M, що записаний на дошці, і замість нього записати $\lambda x.M$.

В кінці на дошці залишається один терм. Далі ЮВ повинен його перетворювати за наступним правилом. По-перше, ЮВ знаходить частину терма, яка має вигляд $(\lambda x.M)N$, де M і N — деякі терми, а x — деяка змінна. Таких частин може бути декілька, і ЮВ має право обрати будь-який з них. Далі обрану частину треба замінити на терм K, де K отримується з M шляхом заміни кожного входження змінної x на N.

Такі кроки (або *редукції*) ЮВ повинен повторювати доки це можливо.

Якщо процес завершився деяким термом, цей кінцевий терм називається *нормальною формою* початкового терму.

Зауваження. Якщо дужки опущені, то терм вигляду MNK повинен інтерпретуватися як $(MN)K$.

Вправа 1. Зведить до нормальної форми терм $(\lambda x.\lambda y.x)(\lambda x.x)$.

Вправа 2. Зведить до нормальної форми терм $(\lambda x.\lambda y.\lambda z.zyx)aa(\lambda p.\lambda q.q)$.

Вправа 3. Зведить до нормальної форми терм $\lambda y.(\lambda x.\lambda y.x)y$.

Логіка. Одного ранку РІ прокинувся і повстав перед складною дилемою: йти грати у волейбол чи купатися у басейні.

— Друже Юрію, — сказав РІ. — Я написав складну логічну формулу, яка містить кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення, і її логічне значення визначить, що я зараз буду робити. Чи не міг би ти обчислити цю формулу для мене?

— Нуу, — образився ЮВ. — Ми про це не домовлялися!

— Добре-добре, — сказав РІ. Він вирішив закодувати логічне значення «істина» термом $\lambda x.\lambda y.x$, а логічне значення «хиба» термом $\lambda x.\lambda y.y$. Далі він придумав, як за допомогою λ-термів виразити усі логічні операції. А ви зможете?

Арифметика. Якось РІ грав у волейбол і запропонував ЮВ вести рахунок.

— Добре, — відповів ЮВ. — Але за умови, що ти виразиш це у свому λ-численні.

РІ ця ідея сподобалася. Він придумав кодувати довільне ціле невід'ємне число n термом

$$\underline{n} = \lambda f.\lambda x.f(f(\ldots f(x)\ldots)),$$

де f зустрічається n разів (зокрема, 0 кодується як $\lambda f.\lambda x.x$).

Далі, щоб вести рахунок, він також придумав λ-терм, який збільшує дане число на 1. В принципі, цього було достатньо для волейбола (не дуже це інтелектуальна гра), але РІ так захопився, що знайшов спосіб додавати і множити довільні цілі невід'ємні числа у такому представленні. (Його навіть хотіли вигнати з команди, бо він думав про λ-числення замість того, щоб слідкувати за м'ячем.) Спробуйте і ви записати ці операції.

Бешкетник. Одного разу до дошки підійшов бешкетник і написав якийсь λ-терм, який на перший погляд не мав сенсу. Пізніше ЮВ проходив повз дошки і побачив цей терм. Він подумав, що це РІ дав йому чергове завдання, і почав перетворювати цей терм. Втім, скільки кроків він не робив, нормальної форми не виходило. Це тривало б нескінченно, якби ЮВ не заснув, виконуючи нудні операції.

Чи зможете ви придумати приклад λ-терму, який мав би такий ефект?

Порядок обчислення. Вранці РІ знайшов сплячого ЮВ біля дошки і про все здогадався.

— Цікаво, — сказав ЮВ, коли прокинувся. — Я і не здогадувався, що бувають терми, які не мають нормальної форми.

— Насправді, терм, над яким ти працював, мав нормальну форму. Ти просто обрав погану частину для спрощення. Якщо б ти спростив його по-іншому, то відразу отримав би нормальну форму. Втім, ти правий, що є терми, які дійсно не мають нормальної форми.

— Он воно як! Здається, я придумав правило, яке дозволить мені знаходити нормальну форму завжди, коли вона є.

Наведіть приклад терму, який був записаний на дошці, та вигадайте правило, яким відтоді користується ЮВ.

Теорема Чорча-Росера.

— Романе, але ж ти ніколи не цікавився порядком, у якому я спрощую терми. Як ти міг довіряти результату, що я отримав? Адже він міг бути різним при різних порядках.

— Я теж через це хвилювався. Але потім я дізнався про теорему, що була отримана Чорчем та Росером. Вона полягає у тому, що якщо терм M можна спростити до терму M_1 та (роблячи перетворення у іншому порядку) до терму M_2, то ці терми завжди потім можна звести до одного й того ж терму N.

— Так, це змінює справу! Тепер я бачу, що коли я отримав нормальну форму, вона єдина!

А ви бачите, чому це так?

Рекурсія. З кожним днем завдання для ЮВ ставали все складнішими, і здавалось, що РІ може закодувати будь-який алгоритм за допомогою λ-числення. Але ЮВ не міг зрозуміти, як така проста мова програмування може бути настільки ж потужною, як звичайні мови. Наприклад, у звичайних мовах є цикли, а що є у λ-численні?

Але спостерігаючи за λ-«програмами», ЮВ помітив, що один підтерм зустрічається дуже часто. Цей підтерм, який ми назвемо Y, має таку цікаву властивість, що для довільного λ-терму F

$$F(YF) \to \Omega_F \to F(\Omega_F),$$

де Ω_F — деякий терм.

Наведіть приклад такого терму Y та поясніть, як він дозволяє записувати рекурсивні функції (якими можна замінити цикли).

Чи є нормальна форма? Тепер ЮВ знав, що довільний алгоритм можна записати у λ-численні, і вирішив також що-небудь запрограмувати. Він захотів написати такий λ-терм H, який міг би визначити для довільного терма M, чи має він нормальну форму. Але зробити це ніяк не виходило. Чому?

Комбінатори. ЮВ подобалося перетворювати терми, що є аплікацією (MN), але не подобалося займатись змінними (x) і абстракціями $(\lambda x.M)$. Тоді РІ запропонував залишити тільки два терма, $K = \lambda x.\lambda y.x$ та $S = \lambda x.\lambda y.\lambda z.xz(yz)$, а все інше виражати через аплікації S і K. Доведіть, що дійсно довільний λ-терм виражається таким чином.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайдіть такий терм F, що $Fx \to xF$.

2. Нехай

$$D = \lambda a.\lambda b.\lambda c.\lambda d.\lambda e.\lambda f.\lambda g.\lambda h.\lambda i.\lambda j.\lambda k.\lambda l.\lambda m.\lambda n.\lambda o.\lambda p.\lambda q.\lambda s.\lambda t.\lambda u.\lambda v.\lambda w.\lambda x.\lambda y.\lambda z.\lambda r.\; r(thisisafixedpointcombinator);$$

$$E = \underbrace{DD\ldots D}_{\text{26 термів}}.$$

Доведіть, що E є комбінатором нерухомої точки, тобто $EF \to F(EF)$ для довільного терма F.

3. Який найпростіший λ-терм Θ, що має властивість $\forall F.\ \Theta F \to F(\Theta F)$, ви зможете побудувати?

4. Побудуйте терм e такий, що $e\,\underline{a}\,\underline{b} = \underline{a^b}$. Спробуйте знайти якомога простіший такий терм.

5. Запишіть Y у термінах S і K.

6. Чи має нормальну форму терм $S_n = \underbrace{SS\ldots S}_{\text{n термів}}$?