Скінченні різниці та біноми

Скінченні різниці

Розглянемо означення похідної функції у точці:

$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \tag{1}$$

Розглянемо, що вийде, якщо δ не прямуватиме до 0, а буде якоюсь константою. Не обмежуючи загальності міркувань (чому?) можемо вважати, що ця константа дорівнює 1. Такий аналог похідної у точці x називається *скінченною різницею* у точці x і позначається символом Δ:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \tag{2}$$

Також для довільної функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ можна розглянути функцію Δf, яка кожному значенню x ставить у відповідність скінченну різницю функції f у точці x.

Доведіть, що скінченні різниці мають наступні властивості, які є аналогом властивостей похідної:

1. $\Delta(Cf(x)) = C\Delta f(x)$, де C — довільна константа
2. $\Delta(f(x) + g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$
3. $\Delta(f(x) \cdot g(x)) = f(x+1)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x) = g(x+1)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x)$

Задача 1. Порахуйте скінченну різницю одночлена $\Delta(x^n)$.

Задача 2. Нехай P_n — многочлен n-го степіня ($n \geqslant 1$). Доведіть, що ΔP_n є многочленом степіня $n-1$.

Задача 3. Нехай k — фіксоване натуральне число. Доведіть, що $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ — многочлен $(k+1)$-го степеня від n.

Різниці вищих порядків

Оскільки Δf також є функцією, від неї також можна взяти скінченну різницю. Це буде *різниця другого порядку* від функції f:

$$\Delta^2(f(x)) = \Delta(\Delta(f(x))). \tag{3}$$

Аналогічно можна побудувати різницю будь-якого натурального порядку n, використовуючи рекурентне співвідношення

$$\Delta^n(f(x)) = \Delta(\Delta^{n-1}(f(x))). \tag{4}$$

Задача 4. Знайдіть:

1. $\Delta^2(f(x))$
2. $\Delta^3(f(x))$

Чи помітили ви закономірність?

Задача 5. Доведіть, що для довільного многочлена $P(x)$ знайдеться деяке достатньо велике n, таке що

$$\Delta^n(P(x)) \equiv 0. \tag{5}$$

Яке найменше n для цього треба взяти?

Оператори

Зауважимо, що Δ є відображенням, що перетворює функції на інші функції. Такі відображення називають *операторами.* Звичайно, операторами також є $\Delta^n, n \in \mathbb{N}$.

Означимо суму та добуток двох довільних операторів F та G наступним чином:

$$(F+G)(f(x)) = F(f(x)) + G(f(x)) \tag{6}$$

$$(F \cdot G)(f(x)) = (F \circ G)(f(x)) = F(G(f(x))) \tag{7}$$

Тоді Δ^n є звичайним степінем по відношенню до нашого добутку, тобто

$$\Delta^n = \underbrace{\Delta \cdot \Delta \cdot \ldots \cdot \Delta}_{n} \tag{8}$$

Задача 6. Які властивості звичайних (чисельних) операцій $+$ та $\cdot$ поширюються на оператори, а які ні?

Біном Ньютона

Помітимо, що оператор Δ може бути виражений через простіші оператори. А саме, позначимо через I тотожній оператор, тобто $I(f(x)) = f(x)$, а через E оператор зсуву, тобто $E(f(x)) = f(x+1)$. Тоді перевірте, що $E = I + \Delta$, тобто $\Delta = E - I$. Тоді $\Delta^n = (E-I)^n$.

Задача 7. Доведіть, що $(E-I)^n$ можна розкласти за формулою бінома Ньютона:

$$\Delta^n = (E-I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k E^{n-k} I^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k E^{n-k} \tag{9}$$

Отримайте звідси вираз для $\Delta^n(f(x))$.

Задача 8. За яких умов на оператори F та G степінь $(F+G)^n$ можна розкласти за формулою бінома Ньютона?

Інтерполяційний многочлен Ньютона

Задача 9. Доведіть формулу

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(0). \tag{10}$$

Задача 10. Нехай P — многочлен n-го степеня. Доведіть, що для будь-якого x

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} C_x^k \Delta^k P(0), \tag{11}$$

де $C_x^k = x(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1)/k!$.

Задача 11. Порахуйте суми $1^k + 2^k + \ldots + n^k$, де $k = 1, 2, 3$.

Задача 12. Знайдіть усі многочлени $P(x)$, що у цілих точках приймають тільки цілі значення.

Для самостійного розв'язування

1. Порахуйте суму $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$.

2. Покажіть, що $\Delta^n(a_0 + \ldots + a_n x^n) = n! \cdot a_n$ та підрахуйте суму

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (a_0 + \ldots + a_n x^n)$$

3. Обчислить суму

$$\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k C_n^k C_{r-sk}^n$$